École Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

CONCOURS FORMULE GENERALE

MATHEMATIQUES I DUREE : 4H COEFFICIENT : 3

LUNDI 27 AVRIL 1987 14H à 18H

I- ALGEBRE

Les deux parties du problème sont totalement indépendantes.

PARTIE A-

a et b étant deux réels, soit $M_{a,b}$ la matrice à 15 lignes et 15 colonnes telle que :

$$\forall\, i \in \{1\ldots15\} \qquad m_{i,i} = a$$

$$\forall\, i,j \in \{1\ldots15\}^2 \quad i \neq j \qquad m_{i,j} = b$$

et A l'ensemble des matrices $M_{a,b}$ quand a et b décrivent $\mathbb{R}$.

1°)Montrer que A a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on donnera une base.

2°)Montrer que A muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau commutatif.

3°)Déterminer suivant les valeurs de a et b le noyau de $M_{a,b}$ et le rang de $M_{a,b}$

4°)Soit $B = M_{1,2}$, déterminer B^{-1} .

PARTIE B

Etant donné un ensemble E de r objets distincts ($r \in \mathbb{N}^*$), on appelle mot de longueur n ($n \in \mathbb{N}^*$), construit sur E, toute suite de n termes dont les éléments sont des éléments de E.
(Si $E = \{a,b,c\}$, bcba est un "mot" de longueur 4)

On dit qu'un mot a la propriété P si et seulement si il est impossible de trouver trois termes consécutifs du mot qui soient identiques.
(Si $E = \{a,b,c\}$, le mot baaca a la propriété P, le cbbba n'a pas la propriété P)

$A_{r,n}$ désigne l'ensemble des mots de longueur n ayant la propriété P construits sur un ensemble E de cardinal r.

- $a_{r,n}$ est le cardinal de $A_{r,n}$

- $a'_{r,n}$ est le nombre d'éléments de $A_{r,n}$ dont le premier élément est égal à un élément donné de E et dont le second élément, s'il existe, est différent du premier.

- $a''_{r,n}$ est le nobmre d'éléments de $A_{r,n}$ dont les deux premiers éléments sont égaux entre eux et égaux à un élément donné de E. (par convention $a''_{r,1} = 0$)

1°) Que est le nombre de mots de longueur n que l'on peut construire sur un ensemble E de cardinal r ?

2°) Quel est le nombre de mots de longueur n, formés d'éléments tous distincts, que l'on peut construire sur un ensemble E de cardinal r ?

3°)Déterminer $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a'_{1,2}, a'_{2,2}$

$a''_{2,2}$ $a''_{2,3}$ $a_{3,3}$ $a'_{3,2}$ $a''_{3,2}$

4°)Exprimer $a_{r,1}$ $a_{r,2}$ $a'_{r,1}$ $a'_{r,2}$ $a''_{r,2}$ $a''_{r,3}$ en fonction de r.

5°)a) Exprimer $a_{r,n}$ en fonction de r, $a'_{r,n}$ et $a''_{r,n}$

b) Exprimer $a'_{r,n}$ en fonction de r, $a'_{r,n-1}$ et $a''_{r,n-1}$ (n>1)

c) Exprimer $a''_{r,n}$ en fonction de r, $a'_{r,n-2}$ et $a''_{r,n-2}$ (n>2)

d) En déduire $a_{r,n}$ en fonction de r, $a_{r,n-1}$, $a_{r,n-2}$ (n>2)

6°)On fixe dorénavant r = 6 on pose $u_n = a_{6,n}$

a) Vérifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$ $u_n = 5\,(u_{n-1} + u_{n-2})$

b) Calculer u_1 et u_2

c) Exprimer u_n en fonction de n.

7°)On lance un dé et on désigne par X le numéro du lancé où, pour la première fois, on vient d'obtenir trois lancés consécutifs identiques.
(Par exemple, si on obtient successivement :
2,1,3,2,2,4,4,4,4,1,2... X = 8)

a) Calculer P(X>2)
b) Calculer P(X>k) pour k entier >2.
c) En déduire P(X=k) $k \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$

Tournez la page S. V. P.

II - ANALYSE

Les trois parties du problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers.

$\mathbb{Z}^-$ désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs.
e est la base des logarithmes népériens ln(e) = 1

Dans tout le problème, x appartient à l'intervalle $]1, +\infty[$

Pour n et k dans $\mathbb{Z}$, on pose $F_{n,k}(x) = \int_e^x t^n \, (\ln(t))^k \, dt$

PARTIE A

I- n=-1, $k \in \mathbb{Z}$ On pose $G_k(x) = F_{-1,k}(x) = \int_e^x \frac{(\ln(t))^k}{t} \, dt$

1°) Calculer $G_{-1}(x)$ en fonction de x.
2°) Calculer $G_k(x)$ en fonction de x et de k ($k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$)
3°) Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles $G_k(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$

II - $k = 1, n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ $H_n(x) = F_{n,1}(x) = \int_e^x t^n \ln(t) \, dt$

1°) Calculer $H_n(x)$ en fonction de x et de n.

2°) Etudier la limite de $H_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

III - $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ $F_{n,k}(x) = \int_e^x t^n \, (\ln(t))^k \, dt$

1°) Etablir une relation entre $F_{n,k}(x)$ et $F_{n,k-1}(x)$. (k>1)

Dire comment le calcul de $F_{n,k}(x)$ se ramène au calcul de $H_n(x)$.

2°) On suppose en outre ici n<-1

a) Montrer que $\lim_{t \to +\infty} t^{n+1} \, (\ln(t))^{k+2} = 0$

b) En déduire qu'il existe un réel $A \in]e, +\infty[$ tel que :

$$\text{pour tout } t>A, \quad t^n \, (\ln t)^k \leqslant \frac{(\ln t)^{-2}}{t}$$

c) Montrer que $F_{n,k}$ est une fonction croissante.

d) Déduire de b et c que $F_{n,k}(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$

3°) On suppose maintenant n>-1

a) Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{n+1}(\ln(t))^k} = 0$

b) En déduire, qu'il existe un réel $B \in]e, +\infty[$ tel que :

$$\text{pour tout } t>B \quad \frac{1}{t} < t^n \, (\ln(t))^k$$

c) Montrer que $F_{n,k}(x)$ diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

PARTIE B

I n = 0, k = -1 $\phi(x) = F_{0,-1}(x) = \int_e^x \frac{1}{\ln(t)} \, dt$

1°) Montrer que ϕ est dérivable deux fois sur $]1, +\infty[$ et déterminer $\phi'(x)$ et $\phi''(x)$. En déduire le sens de variation de ϕ, la concavité de son graphe, l'équation de la tangente au point d'abscisse e.

2°) Montrer que, pour tout t de $]1, +\infty[$ $\ln(t) < t-1$.
En déduire $\lim_{x \to +\infty} \phi(x)$ et $\lim_{x \to 1} \phi(x)$
(On admettra que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x} = 0$)

3°) Calcul approché de $\phi(4)$

a) Tracer rapidement le graphe (C) de la fonction $x \longrightarrow \ln(x)$
Soit A le point de (C) d'abscisse e et B le point de (C) d'abscisse 4.
b) Déterminer les coordonnées de A et B.
c) Déterminer l'équation y = f(x) de la tangente à (C) en A.
d) Déterminer l'équation y = g(x) de la droite AB.
e) Montrer que, pour tout x de $[e, 4]$, $g(x) \leqslant \ln(x) \leqslant f(x)$
En déduire un encadrement de $1/(\ln x)$ pour $x \in [e, 4]$
puis un encadrement de $\phi(4)$.

4° Tracer le graphe de ϕ en utilisant tous les résultats obtenus.

Tournez la page S. V. P.

PARTIE C

I $n=0, k \in \mathbb{Z}^-$ $\quad I_k(x) = \int_e^x \frac{1}{(\ln(t))^{-k}}\, dt$

Etablir une relation entre $I_k(x)$ et $I_{k+1}(x)$. $(k<-1)$

Dire comment le calcul de $I_k(x)$ se ramène au calcul de $\phi(x)$.

II $k = -1, n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ $\quad J_n(x) = \int_e^x \frac{t^n}{\ln(t)}\, dt$

Exprimer $J_n(x)$ à l'aide de la fonction ϕ.

(On pourra effectuer le changement de variable $u = t^{n+1}$)

III - Calculer $\int_e^x \frac{t}{(\ln(t))^2} dt$ à l'aide de la fonction ϕ .

PARTIE D - Calculer $\int_e^x \frac{t}{(4+\ln(t))^2} dt$ à l'aide de la fonction ϕ .

. . .